УДК 512.548.7

ПАРАСТРОФНІ ОРБІТИ КВАЗІГРУП З ВЛАСТИВОСТЯМИ ОБОРОТНОСТІ

Ф. М. Сохацький, А. В. Луценко

Алгебра $(Q;\circ;\overset{\ell}{\circ};\overset{r}{\circ})$ називається *квазігрупою,* якщо операція $(\cdot)$ є оборотною та операції $(\overset{\ell}{\cdot})$ і $(\overset{r}{\cdot})$ є її лівою та правою оборотними, тобто виконуються тотожності

$$(x\circ y)\overset{\ell}{\circ} y=x,\quad (x\overset{\ell}{\circ} y)\circ y=x,\quad x\overset{r}{\circ}(x\circ y)=y,\quad x\circ(x\overset{r}{\circ} y)=y.$$

σ – парастроф $(\overset{\sigma}{\cdot})$ операції $(\cdot)$ визначається рівностями [2]

$$x_{1\sigma}\overset{\sigma}{\cdot}x_{2\sigma}=x_{3\sigma} :\Leftrightarrow x_1\cdot x_2=x_3,\quad \sigma\in S_3:=\{\iota,\ \ell,\ r,\ s,\ s\ell,\ sr\},$$

де $\ell:=(13)$, $r:=(23)$, $s:=(12)$. Бієкції L_a, R_a, M_a квазігрупи називаються *лівою, правою та середньою трансляціями* відповідно [1] та визначаються рівностями

$$L_a(x):=a\cdot x,\qquad R_a(x):=x\cdot a,\qquad M_a(x):=x\overset{r}{\cdot}a.$$

Кожен елемент квазігрупи $(Q;\cdot)$ визначає шість бієкцій: L_a, L_a^{-1}, R_a, R_a^{-1}, M_a, M_a^{-1}.
Означення σ - парастрофа лівої, правої та середньої трансляцій задається рівностями:

$${}^{\sigma}L_a(x):=a\overset{\sigma^{-1}}{\cdot}x,\qquad {}^{\sigma}R_a(x):=x\overset{\sigma^{-1}}{\cdot}a,\qquad {}^{\sigma}M_a(x):=x\overset{r\sigma^{-1}}{\cdot}a.$$

Твердження 1 [3]. Кожна трансляція є σ-парастрофом середньої трансляції для деякого $\sigma\in S_3$:

M_a	M_a^{-1}	L_a	L_a^{-1}	R_a	R_a^{-1}
${}^{\iota}M_a$	${}^{s}M_a$	${}^{\ell s}M_a$	${}^{\ell}M_a$	${}^{r}M_a$	${}^{rs}M_a$

Підстановка σ називається напрямком трансляції ${}^{\sigma}M_a$.
σ-напрямок множини трансляцій, тобто множина всіх трансляцій напрямку σ квазігрупи $(Q;\cdot)$ визначається таким чином:

$${}^{\sigma}\mathrm{M}:=\left\{{}^{\sigma}M_x\ \middle|\ x\in Q\right\},\ \sigma\in S_3.$$

Нехай ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$ позначає клас всіх σ-парастрофів квазігруп з класу $\mathfrak{A}$. Множина всіх попарних парастрофних класів називається *парастрофною орбітою* класу $\mathfrak{A}$ [10]:

$$Po(\mathfrak{A})=\left\{{}^{\sigma}\mathfrak{A}\ \middle|\sigma\in S_3\right\}.$$

Парастрофна орбіта многовидів однозначно визначається одним із її многовидів.

Квазігрупа називається: *LIP, RIP, MIP квазігрупою*, якщо існують перетворення $\lambda,\ \rho,\ \mu$ такі, що для всіх x та y виконуються відповідні рівності

$$\lambda(x)\cdot xy=y;\quad yx\cdot\rho(x)=y;\quad x\cdot y=\mu(y\cdot x).$$

Квазігрупу $(Q;\cdot)$ будемо називати: *середньою CIP квазігрупою, лівою CIP квазігрупою, правою CIP квазігрупою*, якщо існують перетворення α, β, γ такі, що для всіх x та y виконуються відповідні рівності

$$\alpha(x)\cdot yx=y;\quad yx\cdot y=\beta(x);\quad y\cdot xy=\gamma(x).$$

Квазігрупу $(Q;\cdot)$ будемо називати: *середньою дзеркальною квазігрупою, лівою дзеркальною квазігрупою, правою квазігрупою*, якщо існують перетворення φ, δ, ξ такі, що для всіх x та y виконуються відповідні рівності

$$\varphi(x)\cdot y=y\cdot x;\quad y\cdot yx=\delta(x);\quad xy\cdot y=\xi\left(x\right).$$

Теорема 1 [4].

Кожна рівність двох множин трансляцій різних напрямків визначає точно один клас квазігруп. А саме,

1. парастрофна орбіта (середніх, лівих, правих) квазігруп з властивістю оборотності:

${}^{\iota}\mathrm{M} = {}^{s}\mathrm{M}$	$M_x^{-1} = M_{\mu(x)}$	$x \cdot y = \mu(y \cdot x)$	MIP кваз.	$\mathfrak{J} = {}^{s}\mathfrak{J}$
${}^{\ell}\mathrm{M} = {}^{\ell s}\mathrm{M}$	$L_x^{-1} = L_{\lambda(x)}$	$\lambda(x) \cdot xy = y$	LIP кваз.	${}^{\ell}\mathfrak{J} = {}^{\ell s}\mathfrak{J}$
${}^{r}\mathrm{M} = {}^{rs}\mathrm{M}$	$R_x^{-1} = R_{\rho(x)}$	$yx \cdot \rho(x) = y$	RIP кваз.	${}^{r}\mathfrak{J} = {}^{rs}\mathfrak{J}$

2. парастрофна орбіта квазігруп з властивістю схрещеної оборотності:

${}^{\ell}\mathrm{M} = {}^{r}\mathrm{M}$ ${}^{\ell s}\mathrm{M} = {}^{rs}\mathrm{M}$	$L_x^{-1} = R_{\alpha(x)}$ $R_x^{-1} = L_{\alpha(x)}$	$\alpha(x) \cdot yx = y$	MCIP кваз.	$\mathfrak{A} = {}^{s}\mathfrak{A}$
${}^{\iota}\mathrm{M} = {}^{rs}\mathrm{M}$ ${}^{s}\mathrm{M} = {}^{r}\mathrm{M}$	$R_x^{-1} = M_{\beta(x)}$ $M_x^{-1} = R_{\beta(x)}$	$xy \cdot x = \beta(y)$	LCIP кваз.	${}^{\ell}\mathfrak{A} = {}^{\ell s}\mathfrak{A}$
${}^{\ell s}\mathrm{M} = {}^{\iota}\mathrm{M}$ ${}^{s}\mathrm{M} = {}^{\ell}\mathrm{M}$	$L_x = M_{\gamma(x)}$ $M_x^{-1} = L_{\gamma(x)}^{-1}$	$x \cdot yx = \gamma(y)$	RCIP кваз.	${}^{r}\mathfrak{A} = {}^{rs}\mathfrak{A}$

3. парастрофна орбіта дзеркальних квазігруп:

${}^{sr}\mathrm{M} = {}^{r}\mathrm{M}$ ${}^{\ell}\mathrm{M} = {}^{rs}\mathrm{M}$	$L_x = R_{\varphi(x)}$ $R_x^{-1} = L_{\varphi(x)}^{-1}$	$\varphi(x) \cdot y = y \cdot x$	MM кваз.	$\mathfrak{M} = {}^{s}\mathfrak{M}$
${}^{r}\mathrm{M} = {}^{\iota}\mathrm{M}$ ${}^{s}\mathrm{M} = {}^{rs}\mathrm{M}$	$R_x = M_{\delta(x)}$ $M_x^{-1} = R_{\delta(x)}^{-1}$	$x \cdot xy = \delta(y)$	LM кваз.	${}^{\ell}\mathfrak{M} = {}^{\ell s}\mathfrak{M}$
${}^{\ell}\mathrm{M} = {}^{\iota}\mathrm{M}$ ${}^{s}\mathrm{M} = {}^{\ell s}\mathrm{M}$	$L_x^{-1} = M_{\xi(x)}$ $M_x^{-1} = L_{\xi(x)}$	$xy \cdot y = \xi(x)$	RM кваз.	${}^{r}\mathfrak{M} = {}^{rs}\mathfrak{M}$

Література

1. Белоусов В. Д., Основы теории квазигрупп и луп. Москва.: Наука (1967), 222.
2. Sokhatsky F. M. Parastrophic symmetry in quasigroup theory. *Visnyk Donetsk national university, Ser. A: natural sciences*. 2016. No. 1–2. P. 70–83.
3. Sokhatsky F. M., Lutsenko A. V. Classification of quasigroups according to directions of translations I. *Comment. Math. Univ. Carolin*. 2020. Vol. 61, № 4. P. 567–579.
4. Sokhatsky F. M., Lutsenko A. V. Classification of quasigroups according to directions of translations II. *Comment. Math. Univ. Carolin*. (в друці).

УДК 681.03

ПРО АЛГОРИТМ ЗВУЖЕННЯ ЛАТИНСЬКИХ КУБІВ

Ф. М. Сохацький, Р. Д. Матвійчук, М. А. Дмитрук

Останнім часом все більше з’являється наукових праць, де ефективно використовуються латинські квадрати, куби та гіперкуби в таких науках, як кодування, криптографія, статистика, планування експериментів тощо. Аналогом цих понять в інших науках є бінарні та *n*-арні квазігрупи та оборотні функції. Тому існують різні підходи до їх