Теорема 1 [4].

Кожна рівність двох множин трансляцій різних напрямків визначає точно один клас квазігруп. А саме,

1. парастрофна орбіта (середніх, лівих, правих) квазігруп з властивістю оборотності:

${}^{\iota}\mathrm{M} = {}^{s}\mathrm{M}$	$M_x^{-1} = M_{\mu(x)}$	$x \cdot y = \mu(y \cdot x)$	MIP кваз.	$\mathfrak{I} = {}^{s}\mathfrak{I}$
${}^{\ell}\mathrm{M} = {}^{\ell s}\mathrm{M}$	$L_x^{-1} = L_{\lambda(x)}$	$\lambda(x) \cdot xy = y$	LIP кваз.	${}^{\ell}\mathfrak{I} = {}^{\ell s}\mathfrak{I}$
${}^{r}\mathrm{M} = {}^{rs}\mathrm{M}$	$R_x^{-1} = R_{\rho(x)}$	$yx \cdot \rho(x) = y$	RIP кваз.	${}^{r}\mathfrak{I} = {}^{rs}\mathfrak{I}$

2. парастрофна орбіта квазігруп з властивістю схрещеної оборотності:

${}^{\ell}\mathrm{M} = {}^{r}\mathrm{M}$ ${}^{\ell s}\mathrm{M} = {}^{rs}\mathrm{M}$	$L_x^{-1} = R_{\alpha(x)}$ $R_x^{-1} = L_{\alpha(x)}$	$\alpha(x) \cdot yx = y$	MCIP кваз.	$\mathfrak{A} = {}^{s}\mathfrak{A}$
${}^{\iota}\mathrm{M} = {}^{rs}\mathrm{M}$ ${}^{s}\mathrm{M} = {}^{r}\mathrm{M}$	$R_x^{-1} = M_{\beta(x)}$ $M_x^{-1} = R_{\beta(x)}$	$xy \cdot x = \beta(y)$	LCIP кваз.	${}^{\ell}\mathfrak{A} = {}^{\ell s}\mathfrak{A}$
${}^{\ell s}\mathrm{M} = {}^{\iota}\mathrm{M}$ ${}^{s}\mathrm{M} = {}^{\ell}\mathrm{M}$	$L_x = M_{\gamma(x)}$ $M_x^{-1} = L_{\gamma(x)}^{-1}$	$x \cdot yx = \gamma(y)$	RCIP кваз.	${}^{r}\mathfrak{A} = {}^{rs}\mathfrak{A}$

3. парастрофна орбіта дзеркальних квазігруп:

${}^{sr}\mathrm{M} = {}^{r}\mathrm{M}$ ${}^{\ell}\mathrm{M} = {}^{rs}\mathrm{M}$	$L_x = R_{\varphi(x)}$ $R_x^{-1} = L_{\varphi(x)}^{-1}$	$\varphi(x) \cdot y = y \cdot x$	MM кваз.	$\mathfrak{M} = {}^{s}\mathfrak{M}$
${}^{r}\mathrm{M} = {}^{\iota}\mathrm{M}$ ${}^{s}\mathrm{M} = {}^{rs}\mathrm{M}$	$R_x = M_{\delta(x)}$ $M_x^{-1} = R_{\delta(x)}^{-1}$	$x \cdot xy = \delta(y)$	LM кваз.	${}^{\ell}\mathfrak{M} = {}^{\ell s}\mathfrak{M}$
${}^{\ell}\mathrm{M} = {}^{\iota}\mathrm{M}$ ${}^{s}\mathrm{M} = {}^{\ell s}\mathrm{M}$	$L_x^{-1} = M_{\xi(x)}$ $M_x^{-1} = L_{\xi(x)}$	$xy \cdot y = \xi(x)$	RM кваз.	${}^{r}\mathfrak{M} = {}^{rs}\mathfrak{M}$

Література

1. Белоусов В. Д., Основы теории квазигрупп и луп. Москва.: Наука (1967), 222.
2. Sokhatsky F. M. Parastrophic symmetry in quasigroup theory. *Visnyk Donetsk national university, Ser. A: natural sciences*. 2016. No. 1–2. P. 70–83.
3. Sokhatsky F. M., Lutsenko A. V. Classification of quasigroups according to directions of translations I. *Comment. Math. Univ. Carolin*. 2020. Vol. 61, № 4. P. 567–579.
4. Sokhatsky F. M., Lutsenko A. V. Classification of quasigroups according to directions of translations II. *Comment. Math. Univ. Carolin*. (в друці).

УДК 681.03

ПРО АЛГОРИТМ ЗВУЖЕННЯ ЛАТИНСЬКИХ КУБІВ

Ф. М. Сохацький, Р. Д. Матвійчук, М. А. Дмитрук

Останнім часом все більше з’являється наукових праць, де ефективно використовуються латинські квадрати, куби та гіперкуби в таких науках, як кодування, криптографія, статистика, планування експериментів тощо. Аналогом цих понять в інших науках є бінарні та n-арні квазігрупи та оборотні функції. Тому існують різні підходи до їх дослідження: алгебричний, комбінаторний, функційний. В наслідок гарної візуалізації, латинські квадрати більше розвивались комбінаторними методами. Результати таких досліджень можна знайти в [1]. Один із методів отримання одного латинського квадрата чи куба з іншого – це продовження, тобто збільшення на декілька елементів, а також зворотній процес – звуження. Це комбінаторний метод, алгебричний відповідник якого не зручний для використання. Проте, цей метод непоганий для комп'ютерного дослідження латинських квадратів і кубів малих порядків, оскільки передбачає побудову алгоритму. Але якщо продовження і звуження латинських квадратів досліджувалось [2, 3], то для кубів таких розробок немає. До пробних розробок можна віднести роботу [4], де описано один метод розширення латинських кубів. Кількість латинських кубів зростає за подвійною експонентою. В [5] доведено, що порядку 2 існує лише 1 куб, порядку 3 – 11 кубів, порядку 4 – 2589 кубів, порядку 5 – 23192922 куби та порядку 6 – 1381105636226980 кубів.

Кубом називають множину комірок, індексованих елементами множини $\{(x, y, z) | \, x, y, z \in \vec{m}\}$, де $\vec{m} \coloneqq \{0,1, \ldots, m-1\}$.

Стрічкою, рядком і стовпцем відповідно називаємо такі множини комірок:

$$L_{1,a,b} \coloneqq \{(x, a, b) \mid x \in \vec{m}\}, \qquad L_{2,a,b} \coloneqq \{(a, x, b) \mid x \in \vec{m}\}, \quad L_{3,a,b} \coloneqq \{(a, b, x) \mid x \in \vec{m}\}.$$

Отже, куб має m^2 стрічок (рядків, стовпців). Множини комірок

$$S_{1,a} \coloneqq \{(a, y, z) \mid y, z \in \vec{m}\}, \ \ S_{2,a} \coloneqq \{(x, a, z) \mid x, z \in \vec{m}\}, \ S_{3,a} \coloneqq \{(x, y, a) \mid x, y \in \vec{m}\}$$

відповідно називаються *стрічним, рядковим* та *стовпцевим шаром* куба. Отже, куб має m різних стовпцевих (рядкових, стрічних) шарів. Комірка (a, b, c), яка містить елемент d, називається *заповненою* і позначається (a, b, c, d). Множина заповнених комірок називається *повною*, якщо в комірках кожний елемент зустрічається точно по одному разу. Куб називається *латинським*, якщо всі рядки, стовпці і стрічки повні. Отже, в латинському кубові кожний рядок, стовпець та стрічка містять m різних елементів.

Описання алгоритму звуження латинського кубу.

Звуження латинського куба порядку m здійснюємо в такий спосіб: вилучаємо три шари: стрічний, рядковий і стовпцевий, а один з елементів замінюємо іншими елементами так, щоб в результаті отримати латинський куб порядку $m-1$.

Виберемо довільну комірку (a, b, c, d). Перш ніж вилучити стовпцевий, рядковий та стрічний шари, які містять комірку (a, b, c, d), замінимо елемент d в комірках, які не належать цим шарам, елементами, які не збігаються з d. А саме, в комірці (x, y, z, d) замінюємо елемент d елементом, який знаходиться в трьох комірках. Ці комірки є перетинами стрічки, рядка і стовпця, що містять комірку (x, y, z, d), відповідно з стрічним, рядковим та стовпцевим шарами, які вилучаються. Заміна не відбувається, якщо в цих комірках принаймні два елементи різні. Якщо всі заміни відбулися, то вилучаємо стовпцевий, рядковий та стрічний шар, що містять комірку (a, b, c, d). В результаті отримуємо латинський куб порядку $m-1$. Якщо заміна елемента d не відбулася принаймні в одній комірці, то вибрана комірка не *усувна* і обираємо іншу комірку. Якщо всі комірки не усувні, то латинський куб не звужимий даним алгоритмом, проте можливо його можна звузити в інший спосіб.

Література

1. J. Denes A. D. Keedwell, Latin squares. *New developments in the theory and applications.* Volume 46. Pages 1–453 (1991)

2. Ivan I. Deriyenko and Wieslaw A. Dudek, Contractions of quasigroups and Latin squares. *Quasigroups and Related Systems.* 21 (2013), 165−174

3. Білявська Г. Б., Білоусов В. Д. Латинські квадрати, квазігрупи та їх застосування. Кишинів : Штіїнца, 1989, 80 с.

4. Сохацький Ф. М., Кірка Д. В. «Продовження тернарних квазігруп». *Наука онлайн: Міжнародний електронний журнал*. 2020. № 10.

5. Brendan D. McKay, Ian. M. Wanless, A Census of Small Latin Hypercubes. *SIAM Journal om Discrete Mathematics*. 2008, Vol. 22, No. 2. Pp. 719–736.