ПРО КЛАСИФІКАЦІЮ КВАЗІГРУПОВИХ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ВІД ДВОХ ФУНКЦІЙНИХ ЗМІННИХ

Г. В. Крайнічук, А. В. Тарасевич

Бінарна квазігрупа – це впорядкована пара $(Q; f)$, де Q – множина, f – бінарна операція, визначена на Q така, що кожне із рівнянь

$$f(a,y) = b, \qquad f(x,a) = b$$

однозначно розв'язне для будь-якої пари елементів a, b із Q [1]. Очевидно, що співставлення кожній парі (a,b) розв'язок відповідного рівняння є операціями на Q, які позначатимемо через f_1, f_2 відповідно.

Тернарна квазігрупа (або 3-квазігрупа) – це пара $(Q; g)$, де Q – множина, а тернарна операція g задовольняє умовам: для довільних a, b, c із Q кожне з рівнянь

$$g(x,a,b) = c, \qquad g(a,y,b) = c, \qquad g(a,b,z) = c$$

має єдиний розв'язок [2, с.292]. Очевидно, що співставлення кожній трійці (a,b,c) розв'язок відповідного рівняння є операціями на Q, які позначатимемо через g_1, g_2, g_3 відповідно.

Термом [3] називають послідовність незалежних предметних змінних, предметних сталих, незалежних функційних змінних, функційних сталих, ком, лівих та правих круглих дужок, яка утворена таким чином:

1) кожна предметна змінна, предметна стала є термом*;*
2) якщо F – функційна змінна чи функційна стала арності n, та $T_1,\ T_2,\ \dots, T_n$ – терми, то $F(T_1,\ T_2,\ \dots, T_n)$ – терм;
3) інших термів немає.

Введемо такі позначення: $[T]$ – множина предметних змінних, які зустрічаються в записі терма T, $\langle T\rangle$ – множина функційних змінних, які зустрічаються в записі терма T.

Нехай $[T_1] \cup [T_2] =: \{x_1, \dots, x_n\}$ та $\langle T_1\rangle \cup \langle T_2\rangle =: \{F_1, \dots, F_k\}$, тоді формула

$$(\forall x_1), \dots, (\forall x_n) \quad T_1 = T_2$$

називається *функційним рівнянням* від k функційних змінних $F_1, \dots, F_k$.

Функційні рівняння називають *парастрофно-первинно рівносильними* [4], якщо одне рівняння з іншого можна отримати за допомогою скінченної кількості застосувань тотожностей:

$$F(F_1(x,y),y) = x,\ F(x,F_2(x,y)) = y,\ F_1(F(x,y),y) = x,\ F_2(x,F(x,y)) = y,$$
$$G(G_1(x,y,z),y,z) = x,\ G(x,G_2(x,y,z),z) = y,\ G\big(x,y,G_3(x,y,z)\big) = z,$$
$$G_1(G(x,y,z),y,z) = x,\ G_2(x,G(x,y,z),z) = y,\ G_3(x,y,G(x,y,z)) = z.$$

Оскільки множини розв'язків парастрофно-первинно рівносильних рівнянь виражаються одна через іншу, тобто, маючи множину розв'язків одного рівняння можна легко виписати множину розв'язків рівняння парастрофно-первинно рівносильного до даного, то доцільно здійснити класифікацію функційних рівнянь з точністю до відношення парастрофно-первинної рівносильності.

Функційне рівняння називають *тривіальним*, якщо його розв'язки існують лише на одноелементній множині. Оскільки функційні рівняння розглядаємо на множині квазігрупових операцій, то рівняння називаються *квазігруповими* [5].

Якщо в квазігруповому функційному рівнянні принаймні одна з предметних змінних має одну появу, то це рівняння тривіальне. Досліджуються лише функційні рівняння, в яких кожна предметна змінна має принаймні дві появи.

Ми вивчаємо нетривіальні функційні рівняння, які мають дві функційні змінні, арності яких не обов'язково однакові. Якщо арність однакова, то функційне рівняння називається бінарним, тернарним і т.п.

Якщо у функційному рівнянні обидві функційні змінні бінарні, то про класифікацію таких функційних рівнянь на множині квазігруп говорить така теорема.

Теорема 1. [6] *Кожне нетривіальне бінарне квазігрупове функційне рівняння від двох функційних змінних парастрофно-первинно рівносильне точно одному із функційних рівнянь:*

$$A(x,x) = B(x,x), \qquad A(x,x) = B(y,y), \qquad A(x,y) = B(x,y).$$

Якщо функційні змінні у рівнянні лише тернарні, то має місце така теорема.

Теорема 2. [7] *Кожне нетривіальне тернарне квазігрупове функційне рівняння від двох функційних змінних парастрофно-первинно рівносильне принаймні одному із функційних рівнянь:*

$$A(x,x,x) = B(x,x,x), \qquad A(x,x,x) = B(x,y,y),$$
$$A(x,x,y) = B(x,x,y), \qquad A(x,x,x) = B(y,y,y),$$
$$A(x,x,y) = B(x,y,y), \qquad A(x,x,y) = B(y,z,z),$$
$$A(x,y,z) = B(x,y,z).$$

Якщо у функційному рівнянні одна бінарна функційна змінна, а друга тернарна , то такі рівняння називають *квазігруповими бінарно-тернарними*. Класифікація квазігрупових бінарно-тернарних рівнянь подана в наступній теоремі.

Теорема 3. *Кожне нетривіальне бінарно-тернарне квазігрупове функційне рівняння від двох функційних змінних парастрофно-первинно рівносильне точно одному із функційних рівнянь:*

$$F(x,y) = G(x,y,y), \qquad (1)$$
$$F(y,y) = G(x,x,x), \qquad (2)$$
$$F(x,x) = G(x,y,y) \qquad (3)$$
$$F(x,x) = G(x,x,x). \qquad (4)$$

Випишемо розв'язки функційних рівнянь з теореми 3.

Нехай маємо $(Q;+)$ – група, $\alpha, \beta,\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – автоморфізми цієї групи, 0 – її нейтральний елемент; f, g – функції, які лінійні над групою $(Q;+)$:

$$f(x,y) = \alpha x + \beta y + a, \qquad g(x,y,z) = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + b, \qquad (5)$$

де $\alpha 0 = \beta 0\ = 0,\ \gamma_1 0 = \gamma_2 0 = \gamma_3 0 = 0$.

Теорема 4. *Пара функцій f, g, які лінійні над групою $(Q;+)$ і визначені рівностями (5) є розв'язками рівняння:*

– *(1) тоді і тільки тоді коли $a = b,\ \alpha = \gamma_1,\ \beta = \gamma_2 + \gamma_3$;*
– *(2) тоді і тільки тоді коли $a = b,\ \alpha = -\beta,\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$;*
– *(3) тоді і тільки тоді коли $a = b,\ \gamma_2 = -\gamma_3,\ \gamma_1 = \alpha + \beta$;*
– *(4) тоді і тільки тоді коли $a = b,\ \alpha + \beta = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$.*

Література

1. Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. – М.: Наука, 1967. – 223 с.
2. Lijun Ji, Wei R. The spectrum of 2-idempotent 3-quasigroups with conjugate invariant subgroups. //Journal of Combinatorial Designs 2010. – Vol. 18. №4. – P.292 –304.
3. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики: підручник. – К.: Наукова думка, 2002. – 380 с.
4. Сохацький Ф.М. Про класифікацію функційних рівнянь на квазігрупах // Укр. мат. журнал. – 2004. – Т.56. № 9.– С. 1259–1266.
5. Крапєж A. Taylor M. A. Gemini functional equations on quasigroups // Publ. Math. – Debrecen. – 1995. – Vol. 47, №3-4. – P. 281–292.
6. Крайнічук Г.В. Класифікація квазігрупових функційних рівнянь типу (3,3,0) // Вісник ДонНУ. Серія А: Природничі науки, 2016. – № 1–2 (в друці).
7. Крайнічук Г. В., Тарасевич А. Про класифікацію функційних рівнянь на тримісних оборотних функціях // тези збірника International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008).