збільшуватися. Якщо відома швидкість росту популяції $v(t)$, то ми можемо знайти приріст чисельності популяції за проміжок часу від t_0 до T. Справді, з визначення $v(t)$ випливає, що ця функція є похідною від чисельності популяції $N(t)$ в момент t, і, отже, чисельність популяції $N(t)$ є первісною для $v(t)$. Тому:

$$N(t) - N(t_0) = \int_{t_0}^{T} v(t)dt \quad (1)$$

Відомо, що в умовах необмежених ресурсів харчування швидкість росту багатьох популяцій є експоненціальною, тобто $v(t) = ae^{kt}$. Популяція в цьому випадку наче «не старіє». Такі умови можна створити, наприклад, для мікроорганізмів, пересаджуючи час від часу культуру, що розвивається в нову ємність з живильним середовищем [2]. Застосовуючи формулу (1), отримаємо:

$$N(T) = N(t_0) + a\int_{t_0}^{T} e^{kt}dt \ = N(t_0) + \frac{a}{k}(e^{kT} - e^{kt_0}) \quad (2)$$

За формулою, подібною до (2), підраховують, зокрема чисельність культивованих грибків, що виділяють пеніцилін. Це завдання можна запропонувати студентам також при вивченні визначеного інтеграла.

Зазначимо що, в умовах переходу на стандарти нового покоління на засадах компетентісного підходу, викладачеві потрібно переглянути методичний супровід навчального процесу, посиливши його практично-професійну складову.

Література

1. Кепчик Н. В. Математические методы в биологии в контексте университетского образования / Н. В. Кепчик // Вестник Могилевского государственного университета. – №4 (25), 2006. – С. 224–230.

2. Пузирьов В. Є. Професійна спрямованість курсу вищої математики як засіб підвищення якості вищої освіти / В. Є. Пузирьов // Вісник Черкаського університету: Пед. науки. – Вип. 26(359). – 2015. – С. 3–8.

UDC 512.745

ON DERIVATIONS FOR CHEBYSHEV POLYNOMIALS OF THE FIRST KIND AND RELATED IDENTITIES

N. B. Lunio

The Chebyshev polynomials $T_n(x)$ of the first kind are defined by the following generating function

$$\mathsf{G}(T_n(x), t) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n.$$

First derivative of the Chebyshev first kind polynomials $T_n(x)$ can be expressed in terms of $T_n(x)$ as follow (see, for example [1]),

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = 2n \sum_{\substack{k=0 \\ n-k-\text{odd}}}^{n-1} {}' \, T_k(x),$$

where the notation $(\cdot)'$ at the summation symbols means that the term contributed by $k = 0$ is to halved, if it appears. The latter formula is presented in [2] for odd and even indexes separately (as a remark, the difference between "odd" and "even" cases is also admitted in [3]):

$$T_n'(x)=\begin{cases} 2n\left(T_{n-1}(x)+T_{n-3}(x)+\cdots+T_1\right), & \text{n}-\text{even} \\ 2n\left(T_{n-1}(x)+T_{n-3}(x)+\cdots+T_2\right)+nT_0, & \text{n}-\text{odd} \end{cases}$$

which could be easily rewritten in the form

$$\frac{d}{dx}T_n(x)=n\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-(-1)^k\right)T_{n-k}(x)+\frac{1-(-1)^n}{2}T_0(x)\right).$$

Definition 1. Derivations of $\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n]$ defined by

$$D_{\mathrm{T}}(x_0)=0,\ D_{\mathrm{T}}(x_n)=n\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-(-1)^k\right)x_{n-k}+\frac{1-(-1)^n}{2}x_0\right)$$

are called *the Chebyshev first kind derivation*. Some first of them are shown below
$D_{\mathrm{T}}(x_0)=0,\quad D_{\mathrm{T}}(x_1)=x_0,\quad D_{\mathrm{T}}(x_2)=4x_1,\quad D_{\mathrm{T}}(x_3)=6x_2+3x_0,\quad D_{\mathrm{T}}(x_4)=8x_3+8x_1,$
$D_{\mathrm{T}}(x_5)=10x_4+10x_2+5x_0,\ D_{\mathrm{T}}(x_6)=12x_5+12x_3+12x_1, D_{\mathrm{T}}(x_7)=14x_6+14x_4+14x_2+7x_0.$
The k-th derivative of Chebyshev polynomial of the first kind is calculated in [4] as follows

$$D_{\mathrm{T}}^k(x_n)=2^k\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}(n-i-1)^{\underline{k-1}}\binom{k+i-1}{k-1}T_{n-k-2i}(x)-[[n-k\ even]]2^{k-1}\left(\frac{n+k}{2}-1\right)^{\underline{k-1}}\binom{\frac{n+k}{2}-1}{k-1}x_0$$

where notations of falling factorials $s^{\underline{r}}$ and Iverson's symbol $[[P]]$ is used, or, more explicitly,

$$D_{\mathrm{T}}^k(x_n)=2^k\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}\frac{n(n-i-1)!}{(n-k-i)!}\binom{k+i-1}{k-1}x_{n-k-2i}-\frac{1}{2}(1+(-1)^{n-k})2^{k-1}n\frac{\left(\frac{n+k}{2}-1\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!}\binom{\frac{n+k}{2}-1}{k-1}x_0.$$

Consider $P(T_0(x),T_1(x),\ldots,T_n(x))=const.$, where $T_i(x)=x_i$ and $P(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ is a polynomial of $n+1$ variables, $P(T_0(x),T_1(x),\ldots,T_n(x))$ gives an identity of the Chebyshev polynomials of the first kind, and we obtain the following differential operator:

$$\mathrm{D}_{\mathrm{T}}:=x_0\frac{\partial}{\partial x_1}+4x_1\frac{\partial}{\partial x_2}+(6x_2+3x_0)\frac{\partial}{\partial x_3}+\cdots+(n(\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-(-1)^k\right)x_{n-k}+\frac{1-(-1)^n}{2}x_0))\frac{\partial}{\partial x_n},$$

where $P(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ belongs to the kernel of D_{T}.

Definition 2. Subalgebra $\ker D:=\{f\in\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n]\mid D(f)=0\}$ is called the *kernel* of derivation D. It was shown in [5] that for an arbitrary locally nilpotent derivation D if there exists a polynomials h such that $D(h)\neq 0$ but $D^2(h)=0$, then
$\ker D=\mathbb{C}[\sigma(x_0),\sigma(x_1),\ldots,\sigma(x_n)][D(h)^{-1}]\cap\mathbb{C}[x_0,x_1,\ldots,x_n]$, where $\sigma(x_i)=\sum_{k=0}^{\infty}D^k(x_i)\frac{\lambda^k}{k!}$, $\lambda=-\frac{x_1}{x_0}$.

Definition 3. The polynomials C_n are called *the Cayley elements* of the locally nilpotent derivation .

Replacing in (2) factorials' ratios and binomial coefficients by

$$A(n,i,k)=\frac{n(n-i-1)!}{(n-k-i)!}=\prod_{t=1}^{k-1}(n-i-t),\quad C(n,k)=\frac{\left(\frac{n+k}{2}-1\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!}=\prod_{r=1}^{k-1}\left((n-k)/2+r\right),$$

$$B(k,i)=\binom{k+i-1}{k-1}=\frac{1}{i!}\prod_{m=1}^{i}(n-1+m),\quad D(n,k)=\binom{\frac{n+k}{2}-1}{k-1}=\frac{1}{(k-1)!}\prod_{q=1}^{k-1}\left((n-k)/2+q\right)$$

respectively, we obtain, after some computations, the following statement.

Theorem. The Cayley elements for the Chebyshev first kind derivation equal

$$C_n = x_n x_0^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k n}{k!} \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} A(n,i,k) B(k,i) x_{n-k-2i} x_1^k x_0^{n-1-k} - (1+(-1)^{n-k}) \frac{2^{k-2} n}{(k-1)!} C^2(n,k) x_0^{n-k} \right).$$

In particular, $C_0 = x_0$, $C_1 = x_1$, $C_2 = -2x_1^{\ 2} + x_2 x_0$, $C_3 = 8x_1^{\ 3} - 6x_1 x_2 x_0 - 3x_0^{\ 2} x_1 + x_3 x_0^{\ 2}$,
$C_4 = -24x_1^{\ 4} + 24x_1^{\ 2} x_2 x_0 + 8x_0^{\ 2} x_1^{\ 2} - 8x_1 x_3 x_0^{\ 2} + x_4 x_0^{\ 3}$,
$C_5 = 64x_1^{\ 5} - 80x_1^{\ 3} x_2 x_0 + 40x_1^{\ 2} x_3 x_0^{\ 2} - 10x_1 x_4 x_0^{\ 3} - 10x_0^{\ 3} x_1 x_2 - 5x_0^{\ 4} x_1 + x_5 x_0^{\ 4}$.

References

1. Mason J. C., Handcomb D. C. Chebyshev polynomials, Chapman and Hall/CRC, 2003. – 335 p.
2. Chebyshev polynomials, Dymore User's Manual http://www.dymoresolutions.com/dymore4_0/UsersManual/Appendices/ChebyshevPolynomials.pdf.
3. Fox L., Parker I.B. Chebyshev Polynomials in Numerical Analisys. Oxford Univercity Press, Oxford Mathematical handbooks, London 3 (1968), 49.
4. Prodinger H. Representing Derivatives of Chebyshev Polynomials by Chebyshev Polynomials, 1991 Mathematics Subject Classiication: 11 B39. September, 2016, 1-3.
5. Бедратюк Л. П. Диференціювання та тотожності для многочленів Кравчука // Укр. Мат. Бедратюк Л. П. Диференціювання та тотожності для многочленів Кравчука / Л. П. Бедратюк // Укр. мат. журн. – 2013. – 65, № 12. – С. 1587-1603.

УДК 512.548

ПРО ОДНОСТОРОННЮ ЛІНІЙНІСТЬ ІЗОТОПІВ АБЕЛЕВИХ ГРУП

Ф. М. Сохацький, О. О. Тарковська

Нагадаємо, що функція від двох змінних *f*, яка визначена над векторним простором P^n, де P – поле, називається *лінійною*, якщо для деяких квадратних матриць *n*-го порядку *A*, *B*, *C* має місце рівність

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}A + \vec{y}B + C,$$

для всіх $\vec{x}, \vec{y} \in P^n$. Узагальненням цієї функції є функція *f*, яка визначена над групою $(Q;+)$ рівністю

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y + c \tag{1}$$

для деяких ендоморфізмів *α*, *β* групи $(Q;+)$ і елемента $c \in Q$. Якщо коефіцієнти *α* і *β* оборотні, тобто є автоморфізмами групи $(Q;+)$, то операція *f* є оборотною, а пара $(Q; f)$ є квазігрупою і називається *лінійною квазігрупою над групою* $(Q;+)$. Вивченню лінійності квазігруп присвячено багато праць, зокрема в [1] описано усі лінійні ізотопи над циклічними групами.

Відомо, що алгебра $(Q; f)$ називається *квазігрупою* [2], якщо для довільних $a, b \in Q$ кожне з рівнянь

$$f(x, a) = b, \qquad f(a, y) = b$$