Theorem. The Cayley elements for the Chebyshev first kind derivation equal

$$C_n = x_n x_0^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k n}{k!} \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} A(n,i,k) B(k,i) x_{n-k-2i} x_1^k x_0^{n-1-k} - (1+(-1)^{n-k}) \frac{2^{k-2} n}{(k-1)!} C^2(n,k) x_0^{n-k} \right).$$

In particular, $C_0 = x_0$, $C_1 = x_1$, $C_2 = -2x_1{}^2 + x_2 x_0$, $C_3 = 8x_1{}^3 - 6x_1 x_2 x_0 - 3x_0{}^2 x_1 + x_3 x_0{}^2$,

$C_4 = -24x_1{}^4 + 24x_1{}^2 x_2 x_0 + 8x_0{}^2 x_1{}^2 - 8x_1 x_3 x_0{}^2 + x_4 x_0{}^3$,

$C_5 = 64x_1{}^5 - 80x_1{}^3 x_2 x_0 + 40x_1{}^2 x_3 x_0{}^2 - 10x_1 x_4 x_0{}^3 - 10x_0{}^3 x_1 x_2 - 5x_0{}^4 x_1 + x_5 x_0{}^4$.

References

1. Mason J. C., Handcomb D. C. Chebyshev polynomials, Chapman and Hall/CRC, 2003. – 335 p.
2. Chebyshev polynomials, Dymore User's Manual http://www.dymoresolutions.com/dymore4_0/UsersManual/Appendices/ChebyshevPolynomials.pdf.
3. Fox L., Parker I.B. Chebyshev Polynomials in Numerical Analisys. Oxford Univercity Press, Oxford Mathematical handbooks, London 3 (1968), 49.
4. Prodinger H. Representing Derivatives of Chebyshev Polynomials by Chebyshev Polynomials, 1991 Mathematics Subject Classiication: 11 B39. September, 2016, 1-3.
5. Бедратюк Л. П. Диференціювання та тотожності для многочленів Кравчука // Укр. Мат. Бедратюк Л. П. Диференціювання та тотожності для многочленів Кравчука / Л. П. Бедратюк // Укр. мат. журн. – 2013. – 65, № 12. – С. 1587-1603.

УДК 512.548

ПРО ОДНОСТОРОННЮ ЛІНІЙНІСТЬ ІЗОТОПІВ АБЕЛЕВИХ ГРУП

Ф. М. Сохацький, О. О. Тарковська

Нагадаємо, що функція від двох змінних *f*, яка визначена над векторним простором P^n, де P – поле, називається *лінійною*, якщо для деяких квадратних матриць *n*-го порядку *A*, *B*, *C* має місце рівність

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}A + \vec{y}B + C,$$

для всіх $\vec{x}, \vec{y} \in P^n$. Узагальненням цієї функції є функція *f*, яка визначена над групою $(Q;+)$ рівністю

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y + c \qquad (1)$$

для деяких ендоморфізмів α, β групи $(Q;+)$ і елемента $c \in Q$. Якщо коефіцієнти α і β оборотні, тобто є автоморфізмами групи $(Q;+)$, то операція *f* є оборотною, а пара $(Q; f)$ є квазігрупою і називається *лінійною квазігрупою над групою* $(Q;+)$. Вивченню лінійності квазігруп присвячено багато праць, зокрема в [1] описано усі лінійні ізотопи над циклічними групами.

Відомо, що алгебра $(Q; f)$ називається *квазігрупою* [2], якщо для довільних $a, b \in Q$ кожне з рівнянь

$$f(x, a) = b, \qquad f(a, y) = b$$

має єдиний розв'язок у множині Q. При цьому операція $(\cdot)$ називається *оборотною* або *квазігруповою*.

З кожною оборотною операцією пов'язано ще п'ять оборотних операцій, які називаються парастрофами: σ -парастроф ${}^{\sigma}f$ довільної квазігрупової операції f визначається співвідношенням

$$^{\sigma}f(x_{1\sigma}, x_{2\sigma}) = x_{3\sigma} \quad :\Leftrightarrow \quad f(x_1, x_2) = x_3,$$

де $\sigma \in S_3 := \{\iota, \ell, r, s, s\ell, sr\}$, $s := (12)$, $\ell := (13)$, $r := (23)$.

Будь-який парастроф квазігрупи є квазігрупою, тобто клас всіх квазігруп парастрофно замкнений. Тому довільне поняття, яке визначене в класі всіх квазігруп при переході до парастрофа переходить в деяке інше поняття, яке також визначене в класі всіх квазігруп. Отже, разом з кожним поняттям в теорії квазігруп ми маємо ще п'ять понять. Деякі з них можуть збігатися. Набір понять, які при переході до парастрофа переходять один в одного, назвемо парастрофно замкненим. Природно постає питання про описання для кожного поняття парастрофно замкненої системи і встановлення залежності між ними. В цьому дослідженні ми описуємо парастрофне замикання поняття лівої лінійності. Для цього введемо поняття канонічного розкладу.

Якщо квазігрупа $(Q; f)$ лінійна над групою $(Q;+)$, тобто виконується рівність (1), то вона є *ізотопом групи* $(Q;+)$. Права частина формули (1) називається 0-*канонічним розкладом* [3], якщо 0 – нейтральний елемент групи $(Q;+)$ та $\alpha 0 = \beta 0 = 0$. У цьому випадку кажуть, що 0 визначає *канонічний розклад*, $(Q;+)$ – її *група розкладу*, α і β – її *лівий* і *правий коефіцієнти*, c – *вільний член*.

Якщо лівий (правий) коефіцієнт розкладу квазігрупи є автоморфізмом групи розкладу, то квазігрупа називається *ліволінійною* (*праволінійною*). Поняття лівої та правої лінійності в [4] введено як узагальнення лінійності.

Легко бачити, що ліволінійна квазігрупа в (12)-парастрофі є праволінійною, а в (23)-парастрофі переходить в нове поняття, яке ми назвали середньою лінійністю. Виявилось, що для ізотопів комутативних квазігруп система ліва лінійність, права лінійність та середня лінійність є парастрофно замкненою.

У [5] систематизовано відомості про різні види лінійності квазігруп та подано тотожності, які їх характеризують, проте поза увагою залишено поняття середньої лінійності. Згідно результатів нашого дослідження, середня лінійність визначається так:

Означення 1. Ізотоп $(Q; f)$ абелевої групи $(Q;+)$ з канонічним розкладом (1) називається *середньо лінійним*, якщо $\beta\alpha^{-1}$ – автоморфізм $(Q;+)$.

Ліво, право та середньо лінійні квазігрупи назвемо одностороньо лінійними.

Лема. *Співвідношення між односторонньою лінійністю ізотопа абелевої групи та її парастрофами подано у таблиці:*

Парастроф / *Лінійність*	ι	ℓ	r	s	$s\ell$	sr
ліва	*ліва*	*ліва*	*середня*	*права*	*права*	*середня*
права	*права*	*середня*	*права*	*ліва*	*середня*	*ліва*
середня	*середня*	*права*	*ліва*	*середня*	*ліва*	*права*

Досить часто в обчисленнях потрібна формула, яка виражає встановлені залежності. Тому щоб виразити описані у таблиці співвідношення формулою, дамо ще одне означення для односторонньо лінійних ізотопів абелевих груп.

Означення 2. Ізотоп абелевої групи називатимемо

- *1-лінійним*, якщо він право лінійний $(1r = r)$;
- *2-лінійним*, якщо він ліво лінійний $(2\ell = \ell)$;
- *3-лінійним*, якщо він середньо лінійний $(3s = s)$.

Теорема. *Якщо ізотоп абелевої групи i-лінійний, то її* σ *-параcтроф є* $i\sigma^{-1}$ *-лінійним для усіх* $i \in \{1,2,3\}$ *та усіх* $\sigma \in S_3$.

Література

1. Sokhatskyj F., Syvakivskyj P. On linear isotopes of cyclic groups. Quasigroups and related systems, 1994, Vol. 1, 1, 66-76.
2. Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп – М.: Наука, 1967 – 222 с.
3. Сохацький Ф. М. Про ізотопи груп. II. // Український математичний журнал. – 1995. – Вип. 47, № 12. – С. 1935–1948.
4. Белявская Г. Б., Табаров А. Х. Ядра и центр линейных квазигрупп // Известия АН Республики Молдова. Математика. – 1991. – № 3(6). – С. 37–42.
5. Белявская Г.Б. Квазигруппы. Тождества с подстановками, линейность и ядра. – LAP, Германия, 2013. – 72 с.

УДК 512.548.7

ОРТОГОНАЛЬНІСТЬ ТА РЕТРАКТНА ОРТОГОНАЛЬНІСТЬ

І. В. Фриз

Часто в теорії квазігруп термін “ортогональність” відноситься до декількох різних понять, які є узагальненнями ортогональності бінарних (двомісних) операцій. Ми будемо дотримуватися означення ортогональності із [1]. Для опису інших означень ортогональності читач може звернутися до [2], [3] або [4], які є частковими випадками означення із [1].

Ортогональність n-арних операцій більш вивчена для випадку $n = 2$. Детальний огляд теорії ортогональних бінарних операцій зроблений у [5]. Але якщо $n > 2$, то багато питань залишаються без уваги, оскільки вони не мають аналогів у бінарному випадку. Одне із таких питань це ортогональність ретрактів операцій.

Поняття ретрактної ортогональності автором та Ф. М. Сохацьким було введено у [6], як інструмент блочно-рекурсивного алгоритму для побудови ортогональних n-арних операцій, але це поняття залишилося не дослідженим. Саме тому нашою метою є встановлення зв’язків між ортогональністю та ретрактною ортогональністю.

Перш за все нагадаємо основні поняття.

Означення 1. [1] Вибірка n-арних операцій $f_1,\ldots, f_k$ ($n \ge 2$, $k \le n$) визначена на множині Q називається ортогональною, якщо система

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n) = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(x_1,\ldots,x_n) = b_k \end{cases}$$

має точно m^{n-k} розв’язків для будь-яких $b_1,\ldots,b_k \in Q$. Якщо $n = k$, то ця система має єдиний розв’язок. Якщо ж $k > n$, то вибірка операцій $f_1,\ldots, f_k$ називається ортогональною, якщо кожна її n-підвибірка є ортогональною.

Нехай f є n-арною операцією, яка визначена на множині Q, і нехай

$$\delta := \{i_1,\ldots,i_k\} \subseteq \overline{1,n}, \quad \{j_1,\ldots,j_{n-k}\} := \overline{1,n} \setminus \delta, \quad \bar{a} := (a_{j_1},\ldots,a_{j_{n-k}}).$$

Операція $f_{(\bar{a},\delta)}$ визначена рівністю

$$f_{(\bar{a},\delta)}(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}) := f(y_1,\ldots,y_n),$$