Теорема. *Якщо ізотоп абелевої групи i-лінійний, то її* σ *-парастроф є* $i\sigma^{-1}$ *-лінійним для усіх* $i \in \{1,2,3\}$ *та усіх* $\sigma \in S_3$.

Література

1. Sokhatskyj F., Syvakivskyj P. On linear isotopes of cyclic groups. Quasigroups and related systems, 1994, Vol. 1, 1, 66-76.
2. Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп – М.: Наука, 1967 – 222 с.
3. Сохацький Ф. М. Про ізотопи груп. II. // Український математичний журнал. – 1995. – Вип. 47, № 12. – С. 1935–1948.
4. Белявская Г. Б., Табаров А. Х. Ядра и центр линейных квазигрупп // Известия АН Республики Молдова. Математика. – 1991. – № 3(6). – С. 37–42.
5. Белявская Г.Б. Квазигруппы. Тождества с подстановками, линейность и ядра. – LAP, Германия, 2013. – 72 с.

УДК 512.548.7

ОРТОГОНАЛЬНІСТЬ ТА РЕТРАКТНА ОРТОГОНАЛЬНІСТЬ

І. В. Фриз

Часто в теорії квазігруп термін “ортогональність” відноситься до декількох різних понять, які є узагальненнями ортогональності бінарних (двомісних) операцій. Ми будемо дотримуватися означення ортогональності із [1]. Для опису інших означень ортогональності читач може звернутися до [2], [3] або [4], які є частковими випадками означення із [1].

Ортогональність n-арних операцій більш вивчена для випадку $n = 2$. Детальний огляд теорії ортогональних бінарних операцій зроблений у [5]. Але якщо $n > 2$, то багато питань залишаються без уваги, оскільки вони не мають аналогів у бінарному випадку. Одне із таких питань це ортогональність ретрактів операцій.

Поняття ретрактної ортогональності автором та Ф. М. Сохацьким було введено у [6], як інструмент блочно-рекурсивного алгоритму для побудови ортогональних n-арних операцій, але це поняття залишилося не дослідженим. Саме тому нашою метою є встановлення зв’язків між ортогональністю та ретрактною ортогональністю.

Перш за все нагадаємо основні поняття.

Означення 1. [1] Вибірка n-арних операцій $f_1,\ldots, f_k$ ($n \ge 2$, $k \le n$) визначена на множині Q називається ортогональною, якщо система

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n) = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(x_1,\ldots,x_n) = b_k \end{cases}$$

має точно m^{n-k} розв’язків для будь-яких $b_1,\ldots,b_k \in Q$. Якщо $n = k$, то ця система має єдиний розв’язок. Якщо ж $k > n$, то вибірка операцій $f_1,\ldots, f_k$ називається ортогональною, якщо кожна її n-підвибірка є ортогональною.

Нехай f є n-арною операцією, яка визначена на множині Q, і нехай

$$\delta := \{i_1,\ldots,i_k\} \subseteq \overline{1,n}, \quad \{j_1,\ldots,j_{n-k}\} := \overline{1,n} \setminus \delta, \quad \bar{a} := (a_{j_1},\ldots,a_{j_{n-k}}).$$

Операція $f_{(\bar{a},\delta)}$ визначена рівністю

$$f_{(\bar{a},\delta)}(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}) := f(y_1,\ldots,y_n),$$

де $y_i := \begin{cases} x_i, \ i \in \delta, \\ a_i, \ i \notin \delta, \end{cases}$ називається $(\overline{a}, \delta)$*-ретрактом* або δ*-ретрактом* операції f.

Операції $f_{1;(\overline{a},\delta)}$, $f_{2;(\overline{a},\delta)}, \ldots, f_{k;(\overline{a},\delta)}$ називаються *подібними* δ-ретрактами n-арних операцій f_1, $f_2, \ldots, f_k$, якщо $\overline{a}_1 = \overline{a}_2 = \ldots = \overline{a}_k$.

Означення 2. [6] *Нехай* $\delta \subseteq \overline{1,n}$ *та* $|\delta| = k$. *Тоді* k*-вибірка* n*-арних операцій називається* δ-ретрактно ортогональною, *якщо всі вибірки подібних* δ*-ретрактів цих операцій є ортогональними.*

Якщо $\delta = \{i\}$, тоді δ-ретрактна ортогональність операції f_i вироджується в її i-оборотність. Якщо $\delta = \overline{1,n}$, тоді ретрактна ортогональність операцій f_1, $f_2, \ldots, f_k$ є ортогональністю.

Нижче наведені твердження описують різницю між ортогональністю та ретрактною ортогональністю.

Теорема 1. *Якщо для деякого* $\delta \subseteq \overline{1,n}$ *вибірка* n*-арних операцій є* δ*-ретрактно ортогональною, тоді вона є ортогональною.*

Обернене твердження до теореми 1 не істинне.

Твердження 1. *Нехай* $k < n$ *та* $|\delta| = k$. *Тоді існує* k*-вибірка ортогональних* n*-арних операцій така, що для деякого* $\delta \subseteq \overline{1,n}$ *вона не є* δ*-ретрактно ортогональною.*

Як показано у [6], k-вибірку ретракно ортогональних n-арних операцій можна побудувати за допомогою безповторної композиції кожної операції із деякої k-вибірки ортогональних k-арних операцій та довільних 1-оборотних $(n-k+1)$-арних операцій. Тому істинною є нижче наведена лема.

Лема 1. *Кожна* k*-вибірка ортогональних* k*-арних операцій є продовжувальною до* k*-вибірки ортогональних* n*-арних операцій.*

n-Арну операцію f будемо називати δ*-роздільною*, де $\delta = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \overline{1,n}$, якщо існує s-оборотна $(n-k)$-арна операція g і k-арна операція h такі, що f можна представити як

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{s-1}}, h(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}), x_{j_{s+1}}, \ldots, x_{j_{n-k+1}}).$$

Лема 2. *Нехай* $\delta \subset \overline{1,n}$, $|\delta| = k$ і кожна операція з k*-вибірки ортогональних* n*-арних операцій* δ*-роздільною. Якщо існує вибірка ортогональних подібних* δ*-ретрактів операцій цієї вибірки, тоді ця* k*-вибірка є* δ*-ретрактно ортогональною.*

Література

1. Belyavskaya G. Orthogonal hypercubes and n-ary operations / G. Belyavskaya, G. L. Mullen // Quasigroups and Related Systems. – 2005. – N 13, 1. – P. 73–86.

2. Couselo E. Recursive MDS-codes and recursively differentiable quasigroups / E. Couselo, S. Gonzalez, V. Markov, A. Nechaev // Diskr. Math. and Appl. – 1998. – N 8, 3. – P. 217–247.

3. Dougherty S.T. Latin k-hypercubes / S.T. Dougherty, T.A. Szczepanski // Australasian Journal of Combinatorics. – 2008. – N 40. – P. 145-160.

4. Ethhier J.T. Strong forms of orthogonality for sets of hypercubes / J.T. Ethhier, G. L. Mullen // Discrete Mathematics. – 2012. – N 312. – P. 2050-2061.

5. Keedwell A.D., Denes J. Latin Squares and their Applications / A. D. Keedwell, J. Denes. – Budapest: Academiai Kiado, 2015. – 545 p.

6. Fryz I. V. Block composition algorithm for constructing orthogonal n-ary operations / I. V. Fryz, F. M. Sokhatsky // Discrete mathematics, http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2016.11.012 (in print).