УДК 512.55

ЛЕМА ХЕЛМЕРА ТА КІЛЬЦЯ БЕЗУ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1,5

В. П. Щедрик

Проблема кілець елементарних дільників (к.е.д.), яка полягає в підтвердженні або ж у спростуванні того факту, що кожна матриця над комутативною областю скінченно породжених головних ідеалів (областю Безу) еквівалентна до діагональної матриці, є однією з актуальних задач сучасної теорії кілець. Дослідження в цьому напрямі розпочав Г. Сміт, який показав, що цілочислові матриці мають таку властивість. Л. Діксон, Д. Веддербарн, Б. Ван дер Варден, Н. Джекобсон узагальнили цей результат на різні класи як комутативних, так і некомутативних кілець Безу без дільників нуля.

Побудова та аналіз прикладів є одним із шляхів розв'язання проблеми к.е.д.. Зокрема, такий підхід дозволяє викристалізовувати ті властивості кілець, що відповідають за редукцію матриць. Перші підтверджені приклади к.е.д. мали властивість обриву зростаючих ланцюгів ідеалів (цілі числа, кільця поліномів над полями, евклідові кільця, кільця головних ідеалів). О. Хелмер, досліджуючи кільце цілих аналітичних функцій, довів, що воно є к.е.д., в якому зростаючі ланцюги ідеалів не обриваються. Формалізація деяких властивостей цього кільця призвела до появи нового класу нефакторіальних к.е.д., який він назвав адекватними кільцями.

Кільце R називається **адекватним**, якщо R є комутативною областю Безу, в якій для всіх елементів $a \neq 0, b$ існують такі елементи c, d, що $a = cd$, причому $(c, b) = 1$ і кожний необоротний дільник d_i елемента d має необоротний спільний дільник із b.

При доведенні того факту, що адекватні кільця є к.е.д. О. Хелмер опирався на лему (лема Хелмера), яка стверджувала, що для кожної матриці A, яка має максимальний ранг існує такий рядок

$$u = \|1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_n\|,$$

що н.с.д. елементів рядка uA збігається з н.с.д. усіх елементів матриці A. В. Петричкович довів правильність цього твердження для матриць, ранг яких більший за одиницю.

Глибокі дослідження проблеми к.е.д. все більше наводять на думку, що самих методів теорії кілець не достатньо для її розв'язання. Тому в останні роки намітилася тенденція використання понять, запозичених у інших розділах алгебри. Перспективними стали дослідження, що ґрунтуються на понятті стабільного рангу кільця, яке є одним із важливих інваріантів К теорії.

Кільце R має **стабільний ранг 1,5**, якщо з умови $aR + bR + cR = R$, $c \neq 0$, випливає існування такого r, що $(a + br)R + cR = R$.

Теорема. *Нехай R – комутативна область Безу. Для того, щоб для кожної $n \times m$ матриці A над R, $\mathrm{rang}\ A > 1$, існував такий рядок $u = \|1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_n\|$, що*

$$uA = \|b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_m\|,$$

де $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ – н.с.д. усіх елементів матриці A, необхідно та достатньо, щоб стабільний ранг кільця R дорівнював 1,5.