УДК 519.86

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА ДЛЯ АНАЛИЗА ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ГУДВИНА

Е. В. Камынина, В. Е. Пузырев

Предельные циклы являются основным элементом теории нелинейных динамических систем. Одной из первых моделей макроэкономических циклов является модель Гудвина. Эта модель и ее различные модификации до сих пор эффективно применяются при исследовании механизмов развития экономических процессов, характеризующихся цикличностью.

В данной работе исследуется модель экономической динамики Гудвина. Данная задача была рассмотрена в статье [1] и описывает динамику предельных бизнес-циклов. Соответствующее уравнение в обобщенной форме было приведено Лоренцом [2] в виде

$$\ddot{x}(t) + A\big(x(t)\big)\dot{x}(t) + B\big(x(t)\big) = O^*(t), \quad (1)$$

где x – отклонение дохода от равновесия, $A(x)$ – четная функция такая, что $A(0) < 0$, $A''(0) > 0, B(x)$ – нечетная функция, $B(0) = 0, O^*(t)$ – функция издержек.

В своей работе [3] Лоренц и Нуссе рассмотрели частный вид системы (1)

$$\ddot{x} + a\frac{x^2-1}{x^2+1}\dot{x} - bx + cx^3 = O^*(t), \quad (2)$$

где a, b, c – некоторые положительные константы. В случае, когда $O^*(t)$ явно зависит от времени (или является случайной функцией), динамика системы, описываемой уравнением (2), является достаточно сложной, в частности, возможно возникновение хаотических колебаний. В настоящем сообщении мы ограничимся анализом детерминированной системы, т.е. $O^*(t) = 0$.

Литература

1. Goodwin R. M. The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles // Econometrica. – 1951. – Vol. 19, No. 1. – P. 1–17.

2. Lorenz H. W. Nonlinear dynamical economics and chaotic motion, 2nd ad. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1993.

3. Lorenz H. W., Nusse H. E. Chaotic attractors, chaotic saddles, and fractal basin boundaries: Goodwin’s nonlinear accelerator model reconsidered // Chaos, Solutions and Fractals. – 2002. – No. 13. – P. 957–965.

УДК 517.575

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ БЛЯШКЕ-ПРИВАЛОВА ДЛЯ ВИПАДКУ ПОЛІГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

А. В. Ноздрановська

Нехай n та m - цілі додатні числа, G - область в R^n, і нехай функція $f : G \to R$ належить класу $C^{2m-2}(G)$ $(C^0(G) := C(G))$. Визначимо нижній та верхній узагальнені параметри Лапласа порядку m функції f в точці $x \in G$ рівностями:

$$\underline{\Delta^m} f(x) := \frac{2^{2m} m!\Gamma(m+n/2)}{\Gamma(n/2)} \varliminf_{r\to+0}\left(M_r f(x) - \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta^k f(x)}{2^{2k} k!\Gamma(k+n/2)} r^{2k} \right) r^{-2m},$$

$$\overline{\Delta^m} f(x) := \frac{2^{2m} m!\Gamma(m+n/2)}{\Gamma(n/2)} \varlimsup_{r\to+0}\left(M_r f(x) - \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta^k f(x)}{2^{2k} k!\Gamma(k+n/2)} r^{2k} \right) r^{-2m},$$

де $M_r f(x)$ означає середнє значення функції f за евклідовою сферою радіуса r з центром у точці x, Δ - оператор Лапласа, Γ - гамма-функція. Відмітимо, що для функції $f \in C^{2m}(G)$ при всіх $x \in G$ виконуються рівності $\underline{\Delta^m} f(x) = \overline{\Delta^m} f(x) = \Delta^m f(x)$.

В прийнятих позначеннях та при наведених вище припущеннях має місце наступна теорема, яка при $m=1$ є класичним результатом Бляшке-Привалова [1].

Теорема.

Якщо у кожній точці $x \in G$ виконана умова

$$\underline{\Delta^m} f(x) \le 0 \le \overline{\Delta^m} f(x),$$

тоді f є полігармонічною функцією порядку m в області G.

Література

1. Брело М. Основи класичної теорії потенціалу. — М.: Мир, 1964. — 208 с.
2. Zalcman, L. Mean values and differential equations / L. Zalcman // Israel J. Math. – 1973. – V. 14. – P. 339-352
3. Хермандер, Л. Аналіз лінійних диференціальних операторів з частниними похідними. – М. : Мир, 1986 – Т.1. – 464 с.
4. Aronszajn N., Creese T.M., Lipkin L.J. Polyharmonic functions. // Clarendon Press, 1983. – P. 265.
5. Курант Р. Рівняння з частинними похідними. – М.: Мир, 1964. – 831 с.

УДК 517.53

ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ІЗ СЕРЕДНІМ ЗНАЧЕННЯМ У ВИПАДКУ МНОГОКУТНИКА

Ю. В. Перевєрзєва

Теореми про середнє для функцій спеціального виду у випадку многокутних областей представлено у роботах М. О. Ріда [1], Т. Ремзі та І. Вейта [2] (локальний варіант), В. В. Волчкова [3], О. Д. Трофименко [4], [5]. В статті [1], наприклад, розглядається функція виду $\sum_{k=o}^{n-3} \alpha_k z^k + \sum_{k=0}^{n-3} \beta_k \overline{z}^{k}$ (α_k, β_k - деякі сталі), яка є розв'язком інтегрального рівняння по n-кутнику із нульовою правою частиною. Постановка подібних задач має походження від класичного результату Какутані-Нагумо-Уолша-Прівалова про характеризацію гармонічних поліномів степеня не вище $n-1$ ($n \in N$) в класі неперервних функцій на комплексній площині умовою середнього значення по вершинах всіх правильних n-кутників ($n \ge 3$).

У роботі розглянуто функцію виду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{m-1} c_{k,l} z^k \overline{z}^{l},$$

де $n,m,h \in N$, $0 \le h \le n-s$ та $0 \le s \le m-1$. Виявлено, що $f(z)$ задовольняє