$$\underline{\Delta^m} f(x) := \frac{2^{2m} m!\Gamma(m+n/2)}{\Gamma(n/2)} \underline{\lim}_{r\to+0} \left(M_r f(x) - \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta^k f(x)}{2^{2k} k!\Gamma(k+n/2)} r^{2k} \right) r^{-2m},$$

$$\overline{\Delta^m} f(x) := \frac{2^{2m} m!\Gamma(m+n/2)}{\Gamma(n/2)} \overline{\lim}_{r\to+0} \left(M_r f(x) - \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta^k f(x)}{2^{2k} k!\Gamma(k+n/2)} r^{2k} \right) r^{-2m},$$

де $M_r f(x)$ означає середнє значення функції f за евклідовою сферою радіуса r з центром у точці x, Δ - оператор Лапласа, Γ - гамма-функція. Відмітимо, що для функції $f \in C^{2m}(G)$ при всіх $x \in G$ виконуються рівності $\underline{\Delta^m} f(x) = \overline{\Delta^m} f(x) = \Delta^m f(x)$.

В прийнятих позначеннях та при наведених вище припущеннях має місце наступна теорема, яка при $m=1$ є класичним результатом Бляшке-Привалова [1].

Теорема.

Якщо у кожній точці $x \in G$ виконана умова

$$\underline{\Delta^m} f(x) \le 0 \le \overline{\Delta^m} f(x),$$

тоді f є полігармонічною функцією порядку m в області G.

Література

1. Брело М. Основи класичної теорії потенціалу. — М.: Мир, 1964. — 208 с.
2. Zalcman, L. Mean values and differential equations / L. Zalcman // Israel J. Math. – 1973. – V. 14. – P. 339-352
3. Хермандер, Л. Аналіз лінійних диференціальних операторів з частниними похідними. – М. : Мир, 1986 – Т.1. – 464 с.
4. Aronszajn N., Creese T.M., Lipkin L.J. Polyharmonic functions. // Clarendon Press, 1983. – P. 265.
5. Курант Р. Рівняння з частинними похідними. – М.: Мир, 1964. – 831 с.

УДК 517.53

ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ІЗ СЕРЕДНІМ ЗНАЧЕННЯМ У ВИПАДКУ МНОГОКУТНИКА

Ю. В. Перевєрзєва

Теореми про середнє для функцій спеціального виду у випадку многокутних областей представлено у роботах М. О. Ріда [1], Т. Ремзі та І. Вейта [2] (локальний варіант), В. В. Волчкова [3], О. Д. Трофименко [4], [5]. В статті [1], наприклад, розглядається функція виду $\sum_{k=o}^{n-3} \alpha_k z^k + \sum_{k=0}^{n-3} \beta_k \overline{z}^k$ (α_k, β_k - деякі сталі), яка є розв’язком інтегрального рівняння по n-кутнику із нульовою правою частиною. Постановка подібних задач має походження від класичного результату Какутані-Нагумо-Уолша-Прівалова про характеризацію гармонічних поліномів степеня не вище $n-1$ ($n \in N$) в класі неперервних функцій на комплексній площині умовою середнього значення по вершинах всіх правильних n-кутників ($n \ge 3$).

У роботі розглянуто функцію виду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{h} \sum_{l=0}^{m-1} c_{k,l} z^k \overline{z}^l,$$

де $n, m, h \in N$, $0 \le h \le n-s$ та $0 \le s \le m-1$. Виявлено, що $f(z)$ задовольняє інтегральному рівнянню із середнім значенням з вагою $(\zeta - z)^s$ та при повороті на кут α, $0 \le \alpha \le 2\pi$.

Результати такого типу дозволяють побудувати критерій для виконання рівності із середнім значенням та відповідною вагою на комплексній площині.

Література

1. Reade M. O. A theorem of Fedoroff // Duke Math.J. – 1948. – 18. – P.105-109.
2. Ramsey T., Weit Y. Mean values and classes of harmonic functions // Math.Proc.Camb.Dhil.Soc., – 1984. – 96. – P.501–505.
3. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. – Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London, 2003. – 454 p.
4. Трофименко О. Д. Деякі інтегральні рівності для певних класів поліномів // Труды ИПММ. – 2009. – 18. – С. 184–188.
5. Трофименко О. Д. Аналог теореми про середнє для поліномів спеціального вигляду // Український математичний журнал. – 2011. – 63. – С. 699–707.

УДК 519.2

ВЛАСНІ КОМПЛЕКСНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

М. Ю. Петранова, Ю. В. Козаченко

У роботі описано умови існування власних випадкових комплексних процесів, дається визначення цих процесів, визначення стаціонарних власних випадкових комплексних процесів, стаціонарних власних випадкових комплексних процесів зі стійкою кореляційною функцією. Розглянуто означення і деякі властивості квадратичних гауссовских випадкових величин і процесів. Крім того, отримано оцінки розподілу функціоналів модуля стаціонарних гауссовских власних випадкових комплексних процесів, описується поведінка модуля стаціонарного дійсного випадкового комплексного процесу на нескінченності.

Означення 1 Випадковий комплексний процесс $X(t)$ називається власним комплексним випиадковим процессом, якщо псевдокореляційна функція цього процесу дорівнює нулю:

$$EX(t+\tau)\,\mathrm{X}(t) = 0,$$

тобто, коли виконуються умови:

$$EX_c(t+\tau)X_c(t) = EX_s(t+\tau)X_s(t) \tag{1}$$

$$EX_c(t+\tau)X_s(t) = -EX_s(t+\tau)X_c(t) \tag{2}$$

Означення 2 Функція $r(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$ називається стійкою кореляційною функцією

$$r(\tau) = \sigma^2 \exp\left\{-c|\tau|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{\tau}{|\tau|}\omega(\tau,\alpha)\right)\right\}, \tag{3}$$

де $\sigma^2, c, \beta, \alpha$ – дійснозначні константи, такі що $\sigma^2 > 0, c > 0, |\beta| \le 1, 0 \le \alpha \le 2$,