інтегральному рівнянню із середнім значенням з вагою $(\zeta - z)^s$ та при повороті на кут α, $0 \le \alpha \le 2\pi$.

Результати такого типу дозволяють побудувати критерій для виконання рівності із середнім значенням та відповідною вагою на комплексній площині.

Література

1. Reade M. O. A theorem of Fedoroff // Duke Math.J. – 1948. – 18. – P.105-109.
2. Ramsey T., Weit Y. Mean values and classes of harmonic functions // Math.Proc.Camb.Dhil.Soc., – 1984. – 96. – P.501–505.
3. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. – Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London, 2003. – 454 p.
4. Трофименко О. Д. Деякі інтегральні рівності для певних класів поліномів // Труды ИПММ. – 2009. – 18. – С. 184–188.
5. Трофименко О. Д. Аналог теореми про середнє для поліномів спеціального вигляду // Український математичний журнал. – 2011. – 63. – С. 699–707.

УДК 519.2

ВЛАСНІ КОМПЛЕКСНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

М. Ю. Петранова, Ю. В. Козаченко

У роботі описано умови існування власних випадкових комплексних процесів, дається визначення цих процесів, визначення стаціонарних власних випадкових комплексних процесів, стаціонарних власних випадкових комплексних процесів зі стійкою кореляційною функцією. Розглянуто означення і деякі властивості квадратичних гауссовских випадкових величин і процесів. Крім того, отримано оцінки розподілу функціоналів модуля стаціонарних гауссовских власних випадкових комплексних процесів, описується поведінка модуля стаціонарного дійсного випадкового комплексного процесу на нескінченності.

Означення 1 Випадковий комплексний процесс $X(t)$ називається власним комплексним випиадковим процессом, якщо псевдокореляційна функція цього процесу дорівнює нулю:

$$EX(t+\tau)\,\mathrm{X}(t) = 0\,,$$

тобто, коли виконуються умови:

$$EX_c(t+\tau)X_c(t) = EX_s(t+\tau)X_s(t) \tag{1}$$

$$EX_c(t+\tau)X_s(t) = -EX_s(t+\tau)X_c(t) \tag{2}$$

Означення 2 Функція $r(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$ називається стійкою кореляційною функцією

$$r(\tau) = \sigma^2 \exp\left\{-c|\tau|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{\tau}{|\tau|}\omega(\tau,\alpha)\right)\right\}, \tag{3}$$

де $\sigma^2, c, \beta, \alpha$ – дійснозначні константи, такі що $\sigma^2 > 0, c > 0, |\beta| \le 1, 0 \le \alpha \le 2$,

$$\omega(\tau,\alpha)=\begin{cases} tg\,\dfrac{\pi\alpha}{2},\ \textit{якщо}\quad 0\le\alpha\le 2\\ \dfrac{2}{\pi}\log|\tau|,\ \text{якщо}\quad \alpha=1. \end{cases} \tag{4}$$

Означення 3 Стаціонарний власний комплексний випадковий процес називається власним стаціонарним комплексним випадковим процесом зі стійкою коваріаційною функцією, якщо

$$EX(t+\tau)\overline{\mathrm{X}}(t)=r(\tau),$$

де функція $r(\tau)$ задана (3).

Теорема 1 Нехай $X=\{\mathrm{X}(t),t\in[a,b]\}$ – стаціонарний гаусівський власний комплексний випадковий процес $|\mathrm{X}(t)|=\left(\mathrm{X}_c^2(t)+\mathrm{X}_s^2(t)\right)^{1/2}$. Тоді для

$$u\ge\left(\frac{p}{\sqrt{2}}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}+1\right)p}\right)\sigma^2(b-a)^{1/p}$$

виконується наступна нерівність:

$$P\left\{\left\|X(t)^2-\sigma^2\right\|_{L_p([a,b])}>u\right\}\le 2\sqrt{1+\frac{u\sqrt{2}}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})^{1/p}\sigma^2}\cdot\exp\left\{-\frac{u}{\sqrt{2}(\mathrm{b}-\mathrm{a})^{1/p}\sigma^2}\right\}}. \tag{5}$$

Теорема 2. Нехай $X=\{\mathrm{X}(t),t\in[a,b]\}$ - стаціонарний гаусівський власний комплексний випадковий процес і нехай $|\mathrm{X}(t)|=\left(\mathrm{X}_c^2(t)+\mathrm{X}_s^2(t)\right)^{1/2}$. Якщо $\mathrm{X}(t)$ - сепарабельний, то для будь-якого цілого $M>1$ та будь-якого

$$u>\frac{2\sqrt{2}\sigma^2M}{\alpha}\left(\max\left(1,\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha/2}2\sqrt{c}\right)^{\frac{1}{M-1}}\right) \tag{6}$$

маємо $$\mathrm{P}\left\{\sup_{a\le t\le b}\left|\left(\mathrm{X}(t)\right)^2-\sigma^2\right|>x\right\}\le 4e^{\frac{2(M+1)}{\alpha}}\exp\left\{-\frac{x}{\sqrt{2}\sigma^2}\right\}\left(\frac{\alpha x}{2\sqrt{2}\sigma^2M}\right)^{\frac{2M}{\alpha}}\left(1+\frac{\sqrt{2}x}{\sigma^2}\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Теорема 3. Нехай $X=\{\mathrm{X}(t),t\in(-\infty,\infty)\}$ – вимірний стаціонарний гаусівський власний комплексний випадковий процес, нехай $|\mathrm{X}(t)|=\left(\mathrm{X}_c^2(t)+\mathrm{X}_s^2(t)\right)^{1/2}$ та $\mathrm{Y}(t)=|\mathrm{X}(t)|^2-E\left(\mathrm{X}(t)\right)^2=|\mathrm{X}(t)|^2-\sigma^2$. Нехай $c(t),t\in R$ така, що

$$\int_{-\infty}^{\infty}|c(t)|^{-p}dt<\infty,\ p\ge 1.$$

Тоді для

$$u\ge\left(\frac{p}{\sqrt{2}}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}+1\right)p}\right)\cdot\frac{\sigma^2}{\sqrt{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|c(t)|^{-p}dt\right)^{1/p} \tag{8}$$

виконується наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\left\{\left\|\frac{(\mathrm{X}(t))^2-\sigma^2}{c(t)^2}\right\|_{L_p(-\infty,\infty)}>u\right\}\le 2\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}u}{\left(\int_{-\infty}^{\infty}|c(t)|^{-p}\,dt\right)^{1/p}\sigma^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{u}{\left(\int_{-\infty}^{\infty}|c(t)|^{-p}\,dt\right)^{1/p}\sigma^2}\right\}$$

Література

1. Neeser F. D.; Massey J. L. Proper complex random processes with applications to information theory, IEEE Transactions on Information Theory, 1993, Volume: 39, Issue: 4, P. 1293 – 1302.
2. Лукач Е. Характеристические функции. – М.: Наука. – 1979. – 424 с.
3. Doob J. L. Stochastic Processes John Wiley & Sons, 1953.
4. Kozachenko Y.; Rozora I. Simulation of Gaussian stochastic processes // Random Oper. Stoch. Equ. 11, No. 3. Pp 257 – 296. – 2003

UDC 517.548

CONVOLUTION EQUATIONS AND MEAN VALUE THEOREMS FOR SOLUTIONS OF LINEAR ELLIPTIC EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS IN THE COMPLEX PLANE

O. D. Trofymenko

Convolution equations generated by distributions with compact supports and the corresponding mean value theorems was investigated by many authors. In particular, Volchkov described a wide class of radial distributions with compact supports such that solutions of the corresponding convolution equations in open Euclidean balls can be efficiently characterized in terms of the Bessel functions. This characterization implies different corollaries such as uniqueness theorems for solutions of the corresponding convolution equations and two-radius theorems that go back to John (1934) and Delsarte (1961), respectively.

Let s and m be nonnegative integers, $s<m$, and let $0<r<R$. We study smooth functions f of a complex variable that are defined in the disk $D(0, R)$ of radius R centered at zero and satisfy the convolution equation

$$\sum_{p=s}^{m-1}\frac{r^{2p+2}}{(2p+2)(p-s)!\,p!}\partial^{p-s}\overline{\partial}^{p}f(z)=\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta-z|\le r}f(\zeta)(\zeta-z)^{s}\,d\lambda_2(\zeta), \qquad (1)$$

for all $z \in D(0, R-r)$, where ∂ and $\overline{\partial}$ are the Cauchy formal derivatives (operators of complex differentiation) and λ_2 is the planar Lebesque measure.

We characterize such functions in terms of the representation of the Fourier coefficients of the function $g(z):=\partial^{m-s}\overline{\partial}^{m}f(z)$ by series of special functions. A simple corollary of this characterization is a two-radius theorem characterizing solutions of the elliptic equation $\partial^{m-s}\overline{\partial}^{m}f(z)=0$.

A remarkable feature of the convolution equation (1) is that for $s>0$ this equation is generated by non-radial distributions. We reduce this case to the investigation of some concrete radial distributions with compact supports and their spherical transformations that allows to