УДК 517.574

УСЛОВИЯ СУБГАРМОНИЧНОСТИ И СУБГАРМОНИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

А. В. Покровский

Субгармонические функции в евклидовой области G локально суммируемы в G, и для любой точки $x\in G$ среднее значение такой функции по замкнутому шару радиуса r с центром x является неубывающей функцией от r ($0<r<\operatorname{dist}(x, \partial G)$). В обратном направлении, известная теорема Бляшке–Привалова утверждает субгармоничность функции $u(x)$, полунепрерывной сверху и не равной тождественно $-\infty$ в области G, если в каждой точке $x\in G$ с $u(x)\neq-\infty$ выполняется условие $\Delta^*u(x)\geq 0$, где $\Delta^*u(x)$ − верхний обобщенный параметр Лапласа (верхний оператор Привалова) функции u в точке x, построенный с помощью средних значений по шарам. И. И. Привалов (1941) получил более тонкий результат: если функция $u(x)$ полунепрерывна сверху и не равна тождественно $-\infty$ в области G, $E=\{x\in G\colon u(x)=-\infty\}$, $\Delta^*u(x)>-\infty$ всюду в $G\setminus E$ и $\Delta^*u(x)\geq 0$ почти всюду в $G\setminus E$, то функция $u(x)$ субгармонична в G.

Нами доказана новая теорема подобного типа, которая содержит в качестве следствий и частных случаев ряд хорошо известных результатов об устранимых особенностях гармонических и субгармонических функций. В отличие от классических теорем об устранимых особенностях, мы не требуем замкнутости исключительного множества, на котором для рассматриваемой функции допускается нарушение условия Бляшке–Привалова. Условия на это множество формулируются в терминах равенства нулю внутренней меры Хаусдорфа либо внутренней емкости его подмножеств.

Рассматриваются также условия устранимости множеств уровня для гармонических и субгармонических функций. В частности, установлено, что любая функция $u(x)$, непрерывная в евклидовой области G и гармоническая в дополнении к множеству своих нулей (до G), является гармонической во всей области G, если в каждом своем нуле эта функция имеет полный дифференциал. Этот результат обобщает известную теорему Й. Крала (1983) о гармоничности непрерывно дифференцируемой функции в области G, гармонической в дополнении к множеству своих нулей.

UDC 517.548

CONVOLUTION EQUATIONS AND MEAN VALUE THEOREMS FOR SOLUTIONS OF LINEAR ELLIPTIC EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS IN THE COMPLEX PLANE

O. D. Trofymenko

Convolution equations generated by distributions with compact supports and the corresponding mean value theorems was investigated by many authors. In particular, Volchkov described a wide class of radial distributions with compact supports such that solutions of the corresponding convolution equations in open Euclidean balls can be efficiently characterized in terms of the Bessel functions. This characterization implies different corollaries such as uniqueness theorems for solutions of the corresponding convolution equations and two-radius theorems that go back to John (1934) and Delsarte (1961), respectively.

Let s and m be nonnegative integers, $s<m$, and let $0<r<R$. We study smooth functions f of a complex variable that are defined in the disk $D(0, R)$ of radius R centered at zero and satisfy the convolution equation

$$\sum_{p=s}^{m-1} \frac{r^{2p+2}}{(2p+2)(p-s)!\,p!}\partial^{p-s}\overline{\partial}^{p} f(z)=\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta-z|\leq r} f(\zeta)(\zeta-z)^{s}\,d\lambda_2(\zeta), \quad (1)$$

for all $z \in D(0, R\text{-}r)$, where ∂ and $\overline{\partial}$ are the Cauchy formal derivatives (operators of complex differentiation) and λ_2 is the planar Lebesque measure.

We characterize such functions in terms of the representation of the Fourier coefficients of the function $g(z) := \partial^{m-s}\overline{\partial}^{m} f(z)$ by series of special functions. A simple corollary of this characterization is a two-radius theorem characterizing solutions of the elliptic equation $\partial^{m-s}\overline{\partial}^{m} f(z) = 0$.

A remarkable feature of the convolution equation (1) is that for $s>0$ this equation is generated by non-radial distributions. We reduce this case to the investigation of some concrete radial distributions with compact supports and their spherical transformations that allows to apply Volchkov's results on the representation of solutions of convolution equations generated by radial distributions with compact supports.

Література

1. John F. Plane Waves and Spherical Means, Applied to Partial Differential Equations, Dover, New York, 1971.

2. Delsarte J. Lectures on Topics in Mean Periodic Functions and the Two-Radius Theorem, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1961.

3. Berenstein C. A. and Struppa D. C., Complex Analysis and Convolution Equations, Enciclopedia of Mathematical Sciences, V. 54, pp. 1–108, Springer-Verlag, New York, 1993.

4. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

5. Trofymenko O. D., Two-radii theorem for solutions of some mean value equations, Matematychni Studii, 40:2, 137-143 (2013).

UDC 517.957

REMOVABLE ISOLATED SINGULARITIES FOR SOLUTIONS OF ANISOTROPIC POROUS MEDIA EQUATION

M. O. Shan

For the quasilinear parabolic equation in the divergent form

$$u_t - A(\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{u},\nabla \mathrm{u}) = b(\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{u},\nabla \mathrm{u}),\ \ (x,t) \in \Omega_T \setminus \{(x_o,0)\}, \tag{1}$$

$$u(\mathrm{x},0) = 0,\ \ x \in \Omega \setminus \{x_o\}, \tag{2}$$

where $A(a_1, a_2, ..., a_n)$, $b(\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{u},\varsigma)$ satisfy the following structure conditions

$$A(\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{u},\varsigma)\varsigma \geq \nu_1 \sum_{i=1}^{n} |u|^{m_i - 1} |\varsigma|^2,$$

$$|a_i(\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{u},\varsigma)| \leq \nu_1 |\mathrm{u}|^{\frac{m_i - 1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} |u|^{m_j - 1} |\varsigma|^2 \right)^{\frac{1}{2}},\ \ i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$|b(\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{u},\varsigma)| \leq \nu_2 |\mathrm{u}|^{\frac{m-1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |u|^{m_i - 1} |\varsigma|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$