```
22.    LatinSquare [0] = [index for index in range(1,n+1)]
23.    shiftRandom = shifts[randint(1,len(shifts)-1)]
24.    for rl in range(1,n):
25.        for cl in range(n):
26.            LatinSquare [rl][cl] = LatinSquare [0][(shiftRandom*rl+cl) % n]
```

Тут латинський квадрат – матриця LatinSquare [n][n], список shifts – список допустимих зсувів для конкретного n, shiftRandom – випадково обраний із списку shifts конкретний зсув, функція gcd() (рядки коду 2–5) – дещо спрощена реалізація алгоритму Евкліда.

Особливістю побудованого латинського квадрату буде те, що перший його рядок – послідовність чисел $1, 2..n$. Для того, щоб першим рядком була випадкова перестановка $1..n$ необхідно 22 рядок коду змінити на рядок LatinSquare [0] = RandPerm(n). У даному випадку функція RandPerm() – один із можливих способів генерації довільної перестановки.

Література

1. Табакова І. С. Складання латинських квадратів для застосування у плануванні експериментів. *Системи обробки інформації.* 2017. № 4 (150). С. 52–54.
2. Барчук О. З., Грошовий Т. А., Заліська О. М., Шалата В. Я. Вивчення впливу допоміжних речовин на фармако-технологічні властивості таблеток екстракту чорниці листя, екстракту козлятника трави та таурину, отриманих методом прямого пресування. *Фармацевтичний часопис.* 2018. № 1. С. 47–56.
3. Тригубчак О. В., Грошовий Т. А., Гуреєва С. М. Дослідження впливу природи допоміжних речовин на показники якості шипучих таблеток ацетилсаліцилової кислоти, парацетамолу та аскорбінової кислоти. *Актуальні питання фармацевтичної і медичної науки та практики.* 2018. Т. 11, № 1(26). С. 64–68.
4. Lakić N. The application of Latin square in agronomic research. *Journal of Agricultural Sciences*. 2001. Vol. 46 (1). P. 71–77.
5. Dubnitskiy V. Yu., Kobylin A. M., Kobylin O. A. Застосування латинського квадрату для визначення характеристик обчислювального процесу, що істотно впливають на невизначеність результату обчислень основних типів економічних індексів. *Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць.* Полтава: ПНТУ, 2017. Т. 2 (42). С. 76–80.
6. Shcherbacov V., Elements of Quasigroup Theory and Applications. *Chapman & Hall/CRC Monographs and Research Notes in Mathematics*, 2017. 598 p.
7. van Lint J. H., Wilson R. M. A Course in Combinatorics. Cambridge University Press, 2001. 604 p.
8. Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. И., Ривест Р. Л., Штайн К. Алгоритмы. Построение и анализ. М. : Вильямс, 2013. 1328 с.
9. Провков В. С., Дорохов Д. С. Латинский квадрат и его применение. *Безопасность информационного пространства:* материалы XII Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Екатеринбург, 2–4 декабря 2013 г. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. С. 239–242.

УДК 519.6:004.02:004.9

ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ АНАЛІТИЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ

В. Ю. Василенко, О. С. Вєтров, В. П. Шевченко

При вирішенні прикладних математичних задач, сучасній обсяг даних вимагає застосування комп'ютерних обчислень, як числових, так і аналітичних. Такі системи комп'ютерної алгебри, як Maple та Wolfram Mathematica, допомагають дослідникам не витрачати зайвий час на процес технічних символьних розрахунків, а зосередитись на вирішенні самої проблеми. Окрім основних алгебраїчних перетворень, велику частину символьних обчислень припадає на аналітичне інтегрування та розв'язок диференційних рівнянь. Реалізація зазначених операцій у системах на кшталт Maple та Wolfram Mathematica значною мірою базуються на методах теорії спеціальних функцій.

Як відомо, у механіці методи теорії спеціальних функцій також знаходить широке застосування. Однією з актуальних проблем є побудова ефективних алгоритмів аналітичного інтегрування невласних інтегралів. Зокрема, у задачі знаходження фундаментальних розв'язків системи рівнянь тонкої оболонки при статичних навантаженнях основою розробленого методу [1] є можливість знаходження значення інтегралу

$$\int_0^\infty \frac{R^{\nu-n+1} J_{\nu+n}(rR)}{R^2+z^2} dR \tag{1}$$

у аналітичному вигляді (тут $J_\nu(z)$ – функція Бесселя першого роду порядку ν). Вважаємо $r>0, \operatorname{Re} z>0.$

В системах комп'ютерної алгебри аналітичне інтегрування великою мірою побудоване на підході, розробленому Марічевим О. І. [2]. Метод, оснований на спільному використанні інтегрального перетворення Мелліна та властивостей G-функції Мейєра, дає гарні результати, але обчислення інтегралу (1) засобами комп'ютерної алгебри може супроводжуватися деякими проблемами математичного характеру.

Наприклад, обчислимо інтеграл

$$\int_0^\infty \frac{J_1(rR)}{R^2+z^2} dR \tag{2}$$

Можна бачити, що інтеграл (2) отримано з (1) у випадку $\nu=0,\ n=1.$

Результат символьного обчислення інтегралу (2) у системі Maple 17 буде наступним

```
[> assume(r>0, z>0):
[> int(BesselJ(1,r*R)/(z**2+R^2),R=0..infinity);
    1/2*1/z*(-2*BesselK(1,r*z)+BesselK(0,r*z)*BesselI(1,r*z)+BesselK(1,r*z)*BesselI(0,r*z));
```

У синтаксисі системи Maple позначено BesselJ(n,z) – функція Бесселя першого роду порядку n, BesselI(n,z) та BesselK(n,z) – модифіковані функції Бесселя першого та другого родів порядку n.

Проведемо числовий експеримент. Обрахуємо отриманий результат при значеннях параметрів *r=0.5* та *k=0.256.*

```
[> r:=0.5: z:=0.256: 1/2*1/z*(-
2*BesselK(1,r*z)+BesselK(0,r*z)*BesselI(1,r*z)+BesselK(1,r*z)*BesselI(0,r*z));
                        -14.58912170
```

Очевидно, що вказане значення некоректне з математичної точки зору, оскільки $\left|J_n(x)\right| \le 1$ для будь-якого цілого *n*.

Спробуємо обчислити інтеграл засобами Maple 17, але вже за допомогою числових алгоритмів. Реалізуємо наступний код

```
[> r:=0.5: z:=0.256:
[> evalf(int(BesselJ(1,r*R)/(z**2+R^2),R=0..Rn));
```

У таблиці нижче наведені результати розрахунків при різних значеннях параметру Rn.

Rn	Result	Rn	Result	Rn	Result
10	0.6743330360	600	0.6696675491	6000	0.6696673633
25	0.6692960412	800	0.6696674844	7000	0.6696673624
50	0.6695991294	1000	0.6696674310	8000	0.6696673633
75	0.6696440264	2000	0.6696673505	9000	0.6696673626
100	0.6696570111	3000	0.6696673665	10000	0.6696673630
200	0.6696664414	4000	0.6696673620	11000	0.6696673628
400	0.6696675626	5000	0.6696673628	12000	0.6696673628

Результати розрахунків показують, що результат наближається до числового значення, до видається більш адекватним з математичної точки зору. Однак, ми жодним чином не можемо вважати коректним припущення $\infty \sim 12000$. Тому необхідно аналітично обчислити інтеграл (2).

Скористаємось відомою формулою [3]

$$\int_0^\infty \frac{J_0(rR)R}{R^2+z^2}dR = K_0(rz), \qquad (3)$$

де $K_0(rz)$ – модифікована функція Бесселя другого роду (функція Макдональда) порядку нуль. Далі помножимо ліву та праву частину інтегралу (3) на r та візьмемо інтеграл від 0 до r. Знову використовуючи співвідношення [3] отримаємо

$$\int_0^r rJ_0(rR)dr = \frac{r}{R}J_1(rR), \qquad \int_0^r rK_0(rz)dr = -\frac{r}{z}K_1(rz) + \frac{1}{z^2},$$

$$\int_0^\infty \frac{J_1(rR)}{R^2+z^2}dR = -\frac{1}{z}\cdot K_1(rz) + \frac{1}{r\cdot z^2}. \qquad (4)$$

Таким чином, коректне значення інтегралу (2) отримано в (4). Обчислення у системі Maple 17 дає результат

```
[> r:=0.5: z:=0.256:
[> -1/z*BesselK(1,r*z) + 1/r/z**2;
                                  0.6696673629
```

Отримане значення узгоджується із таблицею, що наведена вище.

Повторюючи n-раз зазначену процедуру, отримаємо формулу для інтегрування (1)

$$\int_0^\infty \frac{R^{\nu-n+1}J_{\nu+n}(rR)}{R^2+z^2}dR = (-1)^n z^{\nu-n}K_{\nu+n}(rz) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{z^{-2k}\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(n-k+1)}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^{n-\nu-2k}.$$

Вперше алгоритм аналітичного обчислення інтегралів типу (1) був представлений у [4].

Робота виконана у рамках держбюджетної теми «Розробка методів дослідження міцності та стійкості тонкостінних оболонок та пружних твердих тіл з рідиною при дії різного виду динамічних навантажень» (№ держреєстрації 0119U100042)

Література

1. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек. *Концентрация напряжений.* К. : А.С.К., 1998 С. 205–207. (Механика композитов: В 12 т.; т. 7).

2. Маричев О. И. Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Минск : Наука и техника, 1978. 310 с.

3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. М. : Наука, 1974. 296 с.

4. Величко П. М., Шевченко В. П. О действии сосредоточенных сил и моментов на оболочку положительной кривизны. *Изв. АН СССР. механика твердого тела.* 1969. № 2. С. 147–151.

УДК 519.688:004.02:004.9

КОМП'ЮТЕРНО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МОЖЛИВОСТЕЙ КОРЕКЦІЇ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМОЖЦЯ ГОЛОСУВАННЯ МЕТОДОМ БОРДА

О. С. Вєтров, К. М. Довбня, Д. О. Ливицька

Одним із найуживаніших на практиці методів голосування є метод Борда [1]. На сьогодні метод Борда – це не один, а ціла група методів, що мають єдину ідейну основу, і розрізняються у певних деталях реалізації.

Метод Борда – це система голосування з єдиним переможцем, у якій кожен виборець ранжує список кандидатів в порядку переваги, тобто метод Борда відноситься класу систем преференціального голосування (як і, наприклад, метод Кондорсе). Після того, як виборець впорядкував кандидатів в порядку своїх вподобань, він присвоює p_1 балів своєму